Corrigé

1. a. (S_n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $S_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$.

b. Comme $\frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$. Et donc, par produit, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] = \dfrac{3}{2}$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} - T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Comme $\dfrac{n+1}{3^{n+1}} \geqslant 0$, on en déduit que la suite (T_n) est croissante.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$3T_{n+1} - T_n = 3\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$

$$= 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{n+1}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n} = S_n.$$

D'où $T_{n+1} = \dfrac{S_n + T_n}{3}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition : « $T_n \leqslant 1$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$.

$T_1 = \dfrac{0}{3^0} + \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3} \leqslant 1$. On en déduit que P_1 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $T_k \leqslant 1$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $T_{k+1} \leqslant 1$.

On a $T_{k+1} = \dfrac{S_k + T_k}{3}$. Or, la suite (S_n) est croissante, car $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} > 0$, et converge vers $\dfrac{3}{2}$ donc, pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant \dfrac{3}{2}$. Ainsi, $T_{k+1} \leqslant \dfrac{\frac{3}{2} + T_k}{3}$. De plus, par hypothèse de récurrence, on a $T_k \leqslant 1$ d'où $T_{k+1} \leqslant \dfrac{5}{6} \leqslant 1$.
Ainsi, P_1 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $T_n \leqslant 1$.

d. La suite (T_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel ℓ.

e. On a $\ell = \dfrac{\ell + \frac{3}{2}}{3} \Leftrightarrow 3\ell = \ell + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2\ell = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{3}{4}$.